

2024 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题及答案

一、选择题：1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx2^n}$, 则 $f(x)$ ()

- (A) 在 $x = 1, x = -1$ 处均连续.
- (B) 在 $x = 1$ 处连续, $x = -1$ 处不连续.
- (C) 在 $x = 1, x = -1$ 处均不连续.
- (D) 在 $x = 1$ 处不连续, $x = -1$ 处连续.

【答案】 (D)

(2) 设 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$, k 为整数, 则 I 的值()

- (A) 只与 a 有关
- (B) 只与 k 有关
- (C) 与 a 和 k 均有关
- (D) 与 a 和 k 均无关

【答案】 (B)

(3) 已知 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx$
- (B) $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
- (C) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx$
- (D) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

【答案】 (A)

(4) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_{2n} =$

- (A) $\frac{1}{6}$.
- (B) $\frac{1}{3}$.
- (C) $\frac{1}{6}$.
- (D) $\frac{1}{3}$.

【答案】 (A)

(5) 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 经正交变换化为 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 则二次型对应的矩阵 A 的行列式和迹分别为()

(A) -6, -2.

(B) 6, -2.

(C) -6, 2.

(D) 6, 2.

【答案】 (C)

(6) 设 A 为三阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

【答案】 (C)

(7) 设 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, 若 $|A| = -\frac{1}{2}$ 且 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$,

则()

(A) $a = 1$ 或 $a = -\frac{3}{2}$.

(B) $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

(C) $b = 1$ 或 $b = -\frac{1}{2}$.

(D) $b = -1$ 或 $a = \frac{1}{2}$.

【答案】(B).

(8) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$, 则 X 的三阶中心矩 $E(X - EX)^3 =$ ()

(A) $-\frac{1}{32}$. (B) 0. (C) $\frac{1}{10}$. (D) $\frac{1}{2}$.

【答案】(B).

(9) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(-1, 1)$, 记 $p_1 = P\{2X - Y > 0\}$, $p_2 = P\{X - 2Y > 1\}$, 则()

(A) $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$. (B) $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$.

(C) $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$. (D) $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$.

【答案】(B).

(10) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量与 Z 同分布的是()

(A) $X + Y$. (B) $\frac{X+Y}{2}$. (C) $2X$. (D) X .

【答案】(D).

二、填空题：11~16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

(11) $x \neq 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t} dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ _____.

【答案】 3

(12) $\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4} dx =$

【答案】 $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{8}$.

(13) $z = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是_____.

【答案】 (1,1)

(14) 设某商品价格 $P = \begin{cases} 25 - 0.25Q & Q \leq 20 \\ 35 - 0.75Q & Q > 20 \end{cases}$, 其中 Q 为产量, 总成本函数

$C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$, 求利润的最大值为_____万元.

【答案】 50

(15) A 为 3 阶矩阵, A^* 为其伴随矩阵, E 为单位矩阵, 且 $r(2E - A) = 1, r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| =$ _____.

【答案】 16

(16) 设随机试验每次成功的概率为 p , 进行 3 次独立重复试验, 在至少试验成功 1 次的条件下三次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

三、解答题：17~22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分) 区域 D 位于第一象限, 由 $xy = \frac{1}{3}, xy = 3, y = \frac{1}{3}x, y = 3x$ 围成,

计算 $\iint_D (1+x-y) dx dy$

【答案】 $\frac{8}{3} \ln 3$.

(18) (本题满分 12 分) 函数 $z = z(x, y)$ 由 $z + e^x - y \ln(1+z^2) = 0$ 确定, 求

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \bigg|_{(0,0)}.$$

【答案】 $-1 - 2 \ln 2$.

(19) (本题满分 12 分) 设 $t > 0$, 平面区域 D 由曲线 $y = xe^{-2x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, 记区域 D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

【答案】 $\frac{1}{16} \ln 2 + \frac{3}{64}$.

(20) (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| < 1$, 证明:

$$(1) \quad x \in (0, 1), \quad |f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| < \frac{x(1-x)}{2}.$$

$$(2) \quad \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| < \frac{1}{12}.$$

【答案】 由泰勒公式可证

(21) (本题满分 12 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 向

$$\text{量 } \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明方程组 $Ax = \alpha$ 的解是 $Bx = \beta$ 的解.

(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 有不同的解, 求 a .

【答案】

(1) 将方程组 $Ax = \alpha$ 的解求出, 代入 $Bx = \beta$, 满足题意即可.

(2) $a=1$

(22) (本题满分 12 分) 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta = (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求 c , 使得 $E(T_c) = \theta$.

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小.

【答案】 (1) $\frac{n+1}{n}$; (2) $\frac{n+2}{n+1}$.



路灯在职研究生
www.125yan.com