2024年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题及答案

一、选择题：1～10小题，每小题5分，共50分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

(1) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}\mathrm{d}t$, $g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}\mathrm{d}t$, 则

(A) f(x) 为奇函数，g(x)为偶函数　　(B) f(x) 为偶函数，g(x) 为奇函数.

(C) f(x) 与g(x)均为奇函数.　　(D) f(x) 与g(x)均为偶函数.

【答案】(C)

(2) 设P=P(x, y, 2), Q=Q(x, y, 2)均为连续函数，工为曲面z= $\sqrt{1-X^2-y^2}$ (x 0. y 0)的上侧，则

(B) $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C)

【答案】(A)

(3) 已知幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为ln(2+x), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} na_{2n}=$

(A) .　(B)　(C)　(D) $\frac{1}{3}$.

【答案】(A)

(4) 设函数f(x)在区间(-1, 1)内有定义，

(A)当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$ 时，f(0)=m.

(B) 当 f(0)=m 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$ 时，f(0)=m.

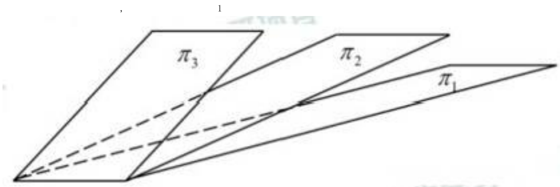
(D) 当f(0)=m 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$.

【答案】(B)

(5) 在空间直角坐标系O-xyz 中，三张平面 $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz=d_i$

(i=1,2,3) 位置关系如图所示，记 $\alpha_i=(a_i,b_i,c_i)$，$\beta_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$，

若r 则



(A)m=1,n=2 (B)m=n=2

(C)m=2,n=3 (D)m=n=3.

【答案】(B)

(6) 设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$。$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$, 若 a_1,a_2,a_3 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

(A)a=1,b≠-1 (B)a=1,b=-1

(C)a≠-2,b=2 (D)a=-2,b=2

【答案】(D)

(7) 设A 是秩为2的3阶矩阵，α 是满足Aα=0 的非零向量，若对满足 $\beta^T\alpha=0$ 的任意向量β，均有Aβ=β, 则

(A) A^3 的迹为2 (B) A^3 的迹为5

(C) A^5 的迹为7. (D) A^5 的迹为9.

【答案】(A)

(8) 设随机变量X 与Y相互独立，X 是服从N(0,2)的正态分布，Y 是服从N(-2,2)的

正态分布，若P{2X+Y<a}=P{X>Y}，则a=

(A)-2-√10 (B)-2+√10 (C)-2-√6 (D)-2+√6

【答案】(B)

⑼设建机交置X的糖率卷酸为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$，在X=x 的条件下，Y在区间(x,1) 上服从均匀分布，则 cov(X,Y)=

(A) $-\frac{1}{36}$ (B) $-\frac{1}{72}$

(c) $\frac{1}{72}$ (D) $\frac{1}{36}$

【答案】(D)

(10)设随机变量X 和 Y相互独立，且都服从参数为入的指数分布，令Z=|X-Y|， 则下列与Z 服从同一分布的是

(A)X+Y (B) $\frac{X+Y}{2}$ (C)2X (D)X

【答案】(D)

二、填空题：11～16小题，每小题5分，共30分.

(11)若 $\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则a=

【答案】6

12)z=f(u, v)有二阶连续导数，df|an=3du+4dv, y=f(cosx, 1+x²), 则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$

【答案】5

(13)若函数 f(x)=x+1， 若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,xe[0,n]， 则极限

$\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$

【答案】$-\frac{1}{\pi}$

(14)微分方程$y'=\frac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件y(1)=0 的解为

【答案】$x=\tan(y+\frac{\pi}{4})-y$.

(15)设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$ 若对任意实向1量$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$,

(a¹Aβ)²a¹Aaβ¹Aβ 都成立，则a 的取值范围

【答案】a 0.

(16)随机试验每次成功的概率为p, 现进行三次独立重复实验，已知至少成功一次的条件下全部成功的概率 , 则p=

【答案】$\frac{2}{3}$

三、解答题：17～22小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分10分)已知平面区域D={(x ,y)|√1-y²≤x≤1, −1≤y≤1}, 计算

$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$.

【答案】 √Z+ln(1+ √2)-2

(18)(本题满分12分)设f(x, y)=x³ +y³ −(x+y)² +3, 曲面z=f(x, y) 在(1, 1, 1)处的切平面为T,T 与三个坐标面所围有界区域在xoy面的投影为D

(1)求T 的方程

(2)求f(x, y)在D 上的最大值和最小值

【答案】切平面x+y+z=3; 最大值21, 最小值$\frac{17}{27}$

(19)设f(x)二阶可导，f(0)=f'(0), [f"(x)|≤1, 证：

1）$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right| \le \frac{x(1-x)}{2}$.

2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \le \frac{1}{12}$

【答案】1)泰勒公式

2)把1)代入

(20)(本题满分12分)已知有向曲线L 为球面$x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面$2x-z-1=0$ 的交线从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分

$$\int(6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$$

[答案】 $\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

(21)(本题满分12分)已知数列{x,},{y,},{z}满足$x_0=-1,y_0=0,z_0=2$, 且 $\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$，记$a_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, 写出满足a=Aa₄ 的矩阵A，并求A”及x,Y,z,(n=1,2,…)

答案】$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^n=\begin{pmatrix} -4+(-1)^{n+1}2^n & -2+(-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4+(-1)^n2^{n+1} & 2+(-1)^n2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

x₄=8+(-2)”,yr=-8+(-2)**,z,=12.

(22)(本题满分12分)设总体X～U(0, θ), θ未知， Xj,X₂…X。 为简单随机样本，

Xw=max(Xγ,X₂…X₁),T=cX·

(1)求c 时，使得T 为0的无偏估计.

(2)记h(c)=E(T-θ)²， 求c使得h(c)取最小值.

【答案】(1) $c=\frac{n+1}{n}$; (2) $c=\frac{n+2}{n+1}$