

2022 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题及答案

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出 4 个选项，只有一个选项是复合题目要求的，请将所选选项前面的字母填在答题卡指定的位置.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 是非零无穷小量, 给出以下四个命题, 其中所有正确的序号是 ()

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

(A) ①②

(B) ①④

(C) ①③④

(D) ②③④

参考答案: (C)

2. 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\{a_n\}$ ()

(A) 有最大值, 有最小值

(B) 有最大值, 没有最小值

(C) 没有最大值, 有最小值

(D) 没有最大值, 没有最小值

参考答案: (A)

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 令 $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x - y - t)f(t) dt$, 则 ()

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

$$(C) \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (D) \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

参考答案: (C)

4. 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln 1+x}{1+\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则 ()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_3 < I_1$ (C) $I_1 < I_3 < I_2$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

参考答案: (A)

5. 设 A 为三阶矩阵, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 的特征值为 1, -1, 0 的充分必要条件是 ()

(A) 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $A = P\Lambda Q$ (B) 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\Lambda P^{-1}$

(C) 存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q\Lambda Q^{-1}$ (D) 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\Lambda P^T$

参考答案: (B)

6. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 解的情况为 ()

(A) 无解 (B) 有解 (C) 有无穷多解或无解 (D) 有唯一解或无解

参考答案: (D)

7. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 ()

(A) $\{0, 1\}$

(B) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$

(C) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$ (D) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

参考答案: (C)

8. 设随机变量 $X \sim N(0, 4)$, 随机变量 $Y \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, 且 X 与 Y 不相关, 则 $D(X - 3Y + 1) = ()$

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10

参考答案: (D)

9. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 且 X_1 的概率密度为 $\begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ()

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

参考答案: (B)

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $\{\max\{X, Y\} = 2\}$ 与事件 $\{\min\{X, Y\} = 1\}$ 相互独立, 则 $\text{cov}(X, Y) = ()$

(A) -0.6 (B) -0.36 (C) 0 (D) 0.48

参考答案: (B)

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案： $e^{\frac{1}{2}}.$

12. $\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案： $\ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$

13. 已知函数 $f(x) = e^{\sin x} + e^{-\sin x}$ ，则 $f'''(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案： 0.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y-x) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案： $(e-1)^2.$

15. 设 A 为三阶矩阵，交换 A 的第二行和第三行，再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列，得到矩阵

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，则 A^{-1} 的迹 $tr(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案： -1.

16. 设 A, B, C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容， A 与 C 互不相容， B 与 C 相互独立，

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ ，则 $P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案: $\frac{5}{8}$.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 满足条件 $y(1) = 3$ 的解, 求 $y(x)$ 的渐进线.

解: 由 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$, 可知

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx} \left[\int 2\sqrt{x} e^{\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx} dx + C \right] = e^{-\sqrt{x}} \left[\int 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx + C \right]$$

$$= e^{-\sqrt{x}} [2xe^{\sqrt{x}} + C] = 2x + Ce^{-\sqrt{x}},$$

由 $y(1) = 3$, 得 $C = e$, 即 $y(x) = 2x + e^{1-\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + e^{1-\sqrt{x}}) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + e^{1-\sqrt{x}}}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-\sqrt{x}} = 0,$$

故, $y(x)$ 的渐进线为 $y = 2x$.

18. 设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定, 生产函数为 $Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$, 该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P = 1160 - 1.5Q$, 若单位资本投入 和但单位劳动投入的价格分别为 6 和 8, 求利润最大时的产量.

解: 利润 $L = PQ - 6x - 8y = (1160 - 1.5Q)Q - 6x - 8y = 13920x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - 216xy^{\frac{1}{3}} - 6x - 8y$,

$$\text{求导, } \begin{cases} L'_x = 6960x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - 216y^{\frac{1}{3}} - 6 = 2y^{\frac{1}{3}}(2320x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}} - 72) - 6 = 0 \\ L'_y = 2320x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}} - 72xy^{-\frac{2}{3}} - 8 = xy^{-\frac{2}{3}}(2320x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}} - 72) - 8 = 0 \end{cases},$$

解得驻点(256,64), 此时 $Q = 12 \times \sqrt{256} \times \sqrt[6]{64} = 384$.

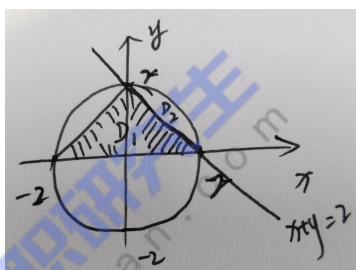
故利润 L 在产量 $Q = 384$ 处取得最大值.

19. 已知平面区域 $D = \{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy$.

解: 从右图可知 $D = D_1 + D_2$,

$$I = \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy,$$

其中 D_1 关于 y 轴对称,



$$\text{上式中 } \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_1} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_1} \frac{2xy}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_1} dx dy = 4,$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}}^2 \frac{r^2 - 2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}}^2 (1 - \sin 2\theta) r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta (1 - \sin 2\theta)}{1 + \sin 2\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\pi - 6,$$

$$\text{故, } I = \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy = 4 + 2\pi - 6 = 2\pi - 2.$$

20. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{n+1}}{4^n(2n+1)} x^{2n}$ 的收敛域和函数 $S(x)$.

解: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-4)^{n+1} + 1}{4^{n+1}(2n+3)} x^{2n+2} \cdot \frac{(-4)^n + 1}{4^n(2n+1)} x^{2n} \right| < 1$, 解得 $|x| < 1$, 即收敛半径 $R = 1$, 收敛区域为 $(-1, 1)$.

当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n + 1}{4^n(2n+1)}$ 收敛, 收敛域为 $(-1, 1)$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n(2n+1)};$$

$$\text{令 } S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \neq 0,$$

由于 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$,

$$\text{则 } S_1(x) = \frac{1}{x} \arctan x, \quad x \neq 0;$$

$$\text{令 } S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n(2n+1)} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}, \quad x \neq 0,$$

由于 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{4-x^2}$, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} = \int_0^x \frac{4}{4-t^2} dt = \ln \frac{2+x}{2-x}$,

$$\text{则 } S_2(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{2+x}{2-x}, \quad x \neq 0;$$

又因为 $S(0) = 2$,

$$\text{故, } S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \arctan x + \frac{1}{x} \ln \frac{2+x}{2-x}, & x \neq 0, \quad x \in [-1, 1] \\ 2, & x = 0 \end{cases}.$$

21. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$,

(1) 求正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(2) 证明 $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$.

解: (1) 令 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2) = 0$,

特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$,

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ 时, $(4E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

当 $\lambda_3 = 2$ 时, $(2E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, $\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

存在 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$.

$(2) x^T x = (Qy)^T (Qy) = y^T Q^T Q y = y^T y$,

$\frac{f(x)}{x^T x} = \frac{f(y)}{y^T y} = \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 2 + \frac{2y_1^2 + 2y_2^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$,

当 $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 \neq 0$ 时, $\frac{f(x)}{x^T x} = 2 + \frac{2y_1^2 + 2y_2^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ 最小, 最小值为 2,

即 $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$, 得证.

22. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自期望为 θ 的指数分布的简单随机样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 是来自期望为 2θ 的指数分布的简单随机样本, $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 相互独立, 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并

求 $D(\hat{\theta})$.

解：由题知， X 的概率密度为 $f_x(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

Y 的概率密度为 $f_y(y; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

$$\text{令 } L = \prod_{i=1}^n f_x(x_i; \theta) \prod_{j=1}^m f_y(y_j; \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \prod_{j=1}^m \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{y_j}{2\theta}}, \quad (x_i > 0, y_j > 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{则 } \ln L = \sum_{i=1}^n \left(-\ln \theta - \frac{x_i}{\theta} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \theta - \frac{y_j}{2\theta} \right),$$

$$\text{求导 } \frac{d \ln L}{d \theta} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{x_i}{\theta^2} \right) + \sum_{j=1}^m \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{y_j}{2\theta^2} \right) = -\frac{m+n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2} + \sum_{j=1}^m \frac{y_j}{2\theta^2} = 0,$$

$$\text{解得 } \hat{\theta} = \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m y_j \right), \text{ 即 } \theta \text{ 的最大似然估计量 } \hat{\theta} = \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m Y_j \right)$$

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{(m+n)^2} \left(\sum_{i=1}^n DX_i + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m DY_j \right) = \frac{1}{(m+n)^2} \left(n\theta^2 + \frac{1}{4} m \cdot 4\theta^2 \right) = \frac{\theta^2}{m+n}.$$