

## 2022 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题及答案

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出 4 个选项，只有一个选项是复合题目要求的，请将所选选项前面的字母填在答题卡指定的位置.

1. 当  $x \rightarrow 0$  时， $\alpha(x)$ ， $\beta(x)$  是非零无穷小量，给出以下四个命题，其中所有正确的序号是 ( )

① 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ，则  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

② 若  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ ，则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$

③ 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ，则  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$

④ 若  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ ，则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$

(A) ①②

(B) ①④

(C) ①③④

(D) ②③④

参考答案：(C)

2.  $\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx = ( )$

(A)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$

(B)  $\frac{1}{3}$

(C)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(D)  $\frac{2}{3}$

参考答案：(D)

3. 设函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处有二阶导数，则 ( )

(A) 当  $f(x)$  在  $x_0$  处的某邻域内单调增加时， $f'(x_0) > 0$ ，

(B) 当  $f'(x_0) > 0$  时， $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内单调增加，

(C) 当  $f(x)$  在  $x_0$  处的某邻域内是凹函数时， $f''(x_0) > 0$ ，

(D) 当  $f''(x_0) > 0$  时,  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内是凹函数.

参考答案: (B)

4. 设函数  $f(t)$  连续, 令  $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t) dt$ , 则 ( )

(A)  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$       (B)  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C)  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$       (D)  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ .

参考答案: (C)

5. 设  $p$  为常数, 若反常积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} dx$  收敛, 则  $p$  的取值范围是 ( )

(A)  $(-1, 1)$       (B)  $(-1, 2)$       (C)  $(-\infty, 1)$       (D)  $(-\infty, 2)$

参考答案: (A)

6. 已知数列  $\{x_n\}$ , 其中  $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$ , 则 ( )

(A) 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$  存在时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

(B) 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$  存在时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在

(C) 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$  存在时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$  存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不一定存在

(D) 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$  存在时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$  存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不一定存在

参考答案: (D)

7. 已知  $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln 1+x}{1+\cos x} dx$ ,  $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$ , 则 ( )

(A)  $I_1 < I_2 < I_3$  (B)  $I_2 < I_3 < I_1$  (C)  $I_1 < I_3 < I_2$  (D)  $I_2 < I_1 < I_3$

参考答案: (A)

8. 设  $A$  为三阶矩阵,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的特征值为 1, -1, 0 的充分必要条件是 ( )

(A) 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $A = P\Lambda Q$

(B) 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P\Lambda P^{-1}$

(C) 存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $A = Q\Lambda Q^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P\Lambda P^T$

参考答案: (B)

9. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  解的情况为 ( )

(A) 无解 (B) 有解 (C) 有无穷多解或无解 (D) 有唯一解或无解

参考答案: (D)

10. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ , 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  等价, 则  $\lambda$  的取值范围是 ( )

(A)  $\{0, 1\}$

(B)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$

(C)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$

(D)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

参考答案: (C)

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案:  $e^{\frac{1}{2}}.$

12. 已知函数  $y = y(x)$  由方程  $x^2 + xy + y^2 = 3$  确定, 则  $y''(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案:  $-\frac{31}{32}.$

13.  $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案:  $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi.$

14. 微分方程  $y''' - 2y'' + 5y' = 0$  的通解  $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案:  $y = C_1 + e^x(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$

15. 已知曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = \sin 3\theta \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$ , 则  $L$  围成有界区域的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案:  $\frac{\pi}{12}.$

16. 设  $A$  为三阶矩阵, 交换  $A$  的第二行和第三行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到矩阵

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A^{-1}$  的迹  $tr(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

参考答案: -1.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2$ , 求  $f'(1)$ .

解: 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2$  可知,  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)] = 0$ ,

即  $-2f(1) = 0$ , 故  $f(1) = 0$ ,

由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - f(1) - 3[f(1 + \sin^2 x) - f(1)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - f(1)}{x^2} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin^2 x) - f(1)}{x^2} = f'(1) - 3f'(1) = 2$ ,

得  $f'(1) = -1$ .

18. 设函数  $y(x)$  是微分方程  $2xy' - 4y = 2 \ln x - 1$  满足条件  $y(1) = \frac{1}{4}$  的解, 求曲线  $y = y(x)$  ( $1 \leq x \leq e$ ) 的弧长.

解: 由题意可知  $y' - \frac{2y}{x} = \frac{2 \ln x - 1}{2x}$ ,

则  $y(x) = e^{-\int (\frac{2}{x}) dx} \left[ \int \frac{2 \ln x - 1}{2x} e^{\int (\frac{2}{x}) dx} dx + C \right] = x^2 \left[ \int \frac{2 \ln x - 1}{2x^3} dx + C \right] = -\frac{1}{2} \ln x + Cx^2$ ,

又  $y(1) = \frac{1}{4}$ , 解得  $C = \frac{1}{4}$ , 故  $y(x) = -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2$ ,

因此弧长为  $L = \int_1^e \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right)^2} dx$

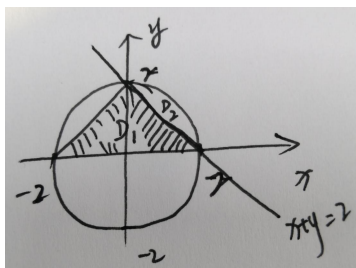
$= \int_1^e \left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right) dx = \left(\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \ln x\right) \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$ .

19. 已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$ , 计算  $I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy$ .

解: 从右图可知  $D = D_1 + D_2$ ,

$$I = \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy,$$

其中  $D_1$  关于  $y$  轴对称,



$$\text{上式中 } \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_1} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_1} \frac{2xy}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_1} dx dy = 4,$$

$$\iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^2 \frac{r^2 - 2r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^2 (1 - \sin 2\theta) r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta (1 - \sin 2\theta)}{1 + \sin 2\theta} d\theta$$

$$= 2\pi - 6,$$

$$\text{故, } I = \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy = 4 + 2\pi - 6 = 2\pi - 2.$$

20. 已知可微函数  $f(u, v)$  满足  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 2(u-v)e^{-(u+v)}$  且  $f(u, 0) = u^2 e^{-u}$ .

(1) 记  $g(x, y) = f(x, y-x)$ , 求  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ ;

(2) 求  $f(u, v)$  的表达式和极值.

解: (1) 因为  $g(x, y) = f(x, y-x)$ ,

$$\text{所以 } \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = f'_1(x, y-x) - f'_2(x, y-x),$$

由题设条件可知:  $f'_1(u, v) - f'_2(u, v) = 2(u - v)e^{-(u+v)}$ ,

所以代入上式,  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2[x - (y - x)]e^{-(x+y-x)} = (4x - 2y)e^{-y}$ ;

$$(2)g(x, y) = f(x, y - x) = \int (4x - 2y)e^{-y} dx = 2x(x - y)e^{-y} + C(y),$$

令  $x = u, y - x = v$ , 则  $f(u, v) = -2uve^{-(u+v)} + C(u + v)$ ,

由  $f(u, 0) = u^2e^{-u}$  可得:  $C(u) = u^2e^{-u}$

因此,  $f(u, v) = -2uve^{-(u+v)} + (u + v)^2e^{-(u+v)} = (u^2 + v^2)e^{-(u+v)}$ ,

$$\text{令} \begin{cases} f'_u = 2ue^{-(u+v)} - (u^2 + v^2)e^{-(u+v)} = (2u - u^2 - v^2)e^{-(u+v)} = 0 \\ f'_v = 2ve^{-(u+v)} - (u^2 + v^2)e^{-(u+v)} = (2v - u^2 - v^2)e^{-(u+v)} = 0 \end{cases},$$

解得  $\begin{cases} u = 0, v = 0 \\ u = 1, v = 1 \end{cases}$  两组解;

$$\begin{cases} f''_{uu} = (2 - 2u)e^{-(u+v)} - (2u - u^2 - v^2)e^{-(u+v)} = (2 - 4u + u^2 + v^2)e^{-(u+v)} \\ f''_{uv} = -2ve^{-(u+v)} - (2u - u^2 - v^2)e^{-(u+v)} = (-2v - 2u + u^2 + v^2)e^{-(u+v)} \\ f''_{vv} = (2 - 2v)e^{-(u+v)} - (2v - u^2 - v^2)e^{-(u+v)} = (2 - 4v + u^2 + v^2)e^{-(u+v)} \end{cases},$$

当  $u = 0, v = 0$  时,  $A = 2, B = 0, C = 2$ ,  $\begin{cases} AC - B^2 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ , 因此  $(0,0)$  是极小值, 且极小值为 0;

当  $u = 1, v = 1$  时,  $A = 0, B = -2, C = 0$ ,  $\begin{cases} AC - B^2 < 0 \\ A = 0 \end{cases}$ , 因此  $(1,1)$  不是极值.

21. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有二阶连续导数, 证明:  $f''(x) \geq 0$  的充要条件是: 对不同实数  $a$ ,

$$b, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

解:  $f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ ,  $\xi$  介于  $x$  与  $\frac{a+b}{2}$  之间,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right] dx$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \left[ \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right] dx,$$

证明必要性: 若  $f''(x) \geq 0$ , 则  $f''(\xi) \geq 0$ , 有  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ,

证明充分性: 若  $\exists x_0$  使得  $f''(x) < 0$ , 因为  $f(x)$  有二阶连续导数,  $\exists \delta$  使得  $f''(x)$  在  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  内恒小于 0, 令  $x_0 - \delta = a$ ,  $x_0 + \delta = b$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \left[ \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right] dx < f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a), \text{ 矛盾, 故 } f''(x) \geq 0,$$

得证.

22. 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ ,

(1) 求正交变换  $x = Qy$  将  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形;

(2) 证明  $\min_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$ .

解: (1) 令  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , 由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2) = 0$ ,

特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$  时,  $(4E - A)x = 0$  的基础解系为  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,



当 $\lambda_3 = 2$  时,  $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$  的基础解系为 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{单位化}, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

存在 $\mathbf{Q} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ 正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$ .

$$(2) \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y},$$

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{f(\mathbf{y})}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 2 + \frac{2y_1^2 + 2y_2^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2},$$

当 $y_1 = y_2 = 0, y_3 \neq 0$  时,  $\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = 2 + \frac{2y_1^2 + 2y_2^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ 最小, 最小值为 2,

即 $\min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = 2$ , 得证.