2021 年金融专硕MF入学统一考试（数学三）试题及答案解析（完整版）

一、选择题：1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

（1）当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是的 x^7 的（　　）

（A）低阶无穷小.　（B）等价无穷小　（C）高阶无穷小.　（D）同阶但非等价无穷小.

【答案】（C）

【解析】根据题设，由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(e^{x^6}-1)}{7x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^7}{7x^6}=0,$$

可知 $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是的 x^7 的高阶无穷小，即选项（C）为正确选项.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　　）.

（A）连续且取极大值.（B）连续且取极小值.（C）可导且导数为0.（D）可导且导数不为0.

【答案】（D）

【解析】根据题设，由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又因

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导数不为 0，即选项（D）为正确选项.

（3）设函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是（　　）.

（A）$(e,+\infty)$.　（B）$(0,e)$.　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

【答案】（A）

【解析】根据题设，$f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$，定义域为$(0,+\infty)$.

由 $f'(x)=a-\frac{b}{x}=0$ 可得 $x=\frac{b}{a}$，列表分析如下：

x	$\left(0,\frac{b}{a}\right)$	$\frac{b}{a}$	$\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调减少	极小值	单调增加

由此可知，若函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有2个零点，则

$$f\left(\frac{b}{a}\right)=b-b\ln\frac{b}{a}<0,$$

于是，$\frac{b}{a}>e$，即选项（A）为正确选项.

（4）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$（　　）

（A）$dx+dy$.　　（B）$dx-dy$.　　（C）dy.　　（D）$-dy$.

【答案】（C）

【解析】根据题设，对方程 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两边关于变量 x 求导，可得

$$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)\cdot e^x=(x+1)(3x+1).\quad ①$$

对方程 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边关于变量 x 求导，可得

$$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x.\quad ②$$

若将 $x=0$ 代入①式，将 $x=1$ 代入②式，则可得

$$\begin{cases} f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1 \\ f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2 \end{cases}$$

由此解出 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，于是$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$.

因此，选项（C）为正确选项.

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）.

（A）2；0.　　（B）1；1.　　（C）2；1.　　（D）1；2.

【答案】（B）

【解析】根据题设，由拉格朗日配方法，可得

$$\begin{aligned} f &= 2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3 \\ &= 2(x_2^2+x_1x_2+x_2x_3)+2x_1x_3 \\ &= 2\left(x_2+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_3^2+x_1x_3 \\ &= 2\left(x_2+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2. \end{aligned}$$

令 $y_1=x_2+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3,\ y_2=x_1-x_3$，则

$$f\ \underline{\underline{y=Cx}}\ 2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2,\ C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，所求二次型的正惯性指数与负惯性指数分别为 1 和 1，即选项（B）为正确选项.

（6）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶正交矩阵，若矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $BX=\beta$ 的通解 $X=$（　　）

（A）$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_1$.　　（B）$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_2$.

（C）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+k\alpha_3$.　　（D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$.

【答案】（D）

【解析】根据题设，由于 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶正交矩阵，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为正交单位向量组，即 $\alpha_i^T\alpha_j=0, i\neq j, \alpha_i^T\alpha_i=1, i,j=1,2,3,4$.

因矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$ 为 3×4 的矩阵，故由 $4-r(B)=4-r\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}=1$，可知 $BX=0$ 的基础解系由一

个解向量组成，从而，由

$$B\alpha_4=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T\alpha_4$$
$$=\left[\alpha_4^T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\right]^T=(\alpha_4^T\alpha_1,\alpha_4^T\alpha_2,\alpha_4^T\alpha_3)^T$$
$$=(0,0,0)^T=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

可知， $BX=0$ 的基础解系为α_4.

又因

$$B(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\begin{bmatrix}\alpha_1^T(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\\ \alpha_2^T(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\\ \alpha_3^T(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

故$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是 $BX=\beta$ 的特解，因此 $BX=\beta$ 的通解 $X=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$，即选项（D）为正确选项.

（7） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}$，若存在下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角阵，则 P,Q 可以分别为（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】（C）

【解析】【解法一】根据题设，由于

对于选项（A），$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$；

对于选项（B），$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$；

对于选项（C），$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；

对于选项（D），$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&5&-7\\6&13&-23\end{pmatrix}$

可知，则选项（C）为正确选项.

【解法二】由于

$$\begin{aligned}(A,E)&=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{array}\right)\\&\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{array}\right)\end{aligned},$$

故$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$.

又因，

$$\left(\begin{array}{ccc}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&0\\\hline 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hline 1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right),$$

故 $Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

综上可知，故（C）为正确选项.

（8） 设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是（　　）.

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A\ B)=P(A)$.

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(A\ B)>P(A)$.

(C) 若 $P(A\ B)>P(A\ B)$，则 $P(A\ B)>P(A)$.

(D) 若 $P(A\ A\cup B)>P(A\ A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

【答案】（D）

【解析】根据题设，则

对于选项（A），若 $P(A\ B)=P(A)$，则由 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$，可得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A,B 为相互独立的事件，故 $P(A\ B)=P(A)$.因此，选项（A）为真命题.

对于选项（B），若 $P(A|B)>P(A)$，则由 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$，可得 $P(AB)>P(A)P(B)$.

于是，由

$$P(A\ B)-P(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}-\frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$
$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)-\left[1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\right]}{P(\bar{B})}$$
$$=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(B)}>0,$$

可知 $P(A\ B)>P(\bar{A})$.因此，选项（B）为真命题.

对于选项（C），若 $P(A|B)>P(A\ B)$，则由 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$，可得

$$P(AB)\left[1-P(B)\right]>\left[P(A)-P(AB)\right]P(B),$$

即 $P(AB)>P(A)P(B)$.

于是，由 $P(A|B)-P(A)=\dfrac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(B)}>0$，可知 $P(A|B)>P(A)$.因此，选项（C）为真命题.

对于选项（D），若 $P(A|A\cup B)>P(A\ A\cup B)$，则由 $\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}>\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(A\cup B)}$，可得

$$P(A)>P(\bar{A}B)\text{，即 } P(A)>P(B)-P(AB)\text{，}$$

显然，由 $P(A)>P(B)-P(AB)$ 并不能推导出 $P(A)>P(B)$，故选项（D）为假命题，符合题意．综上可知，选项（D）为正确选项.

（9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令

$$\theta=\mu_1-\mu_2,\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}\text{，}$$

则（　）.

（A）$E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.（B）$E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（C）$E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.（D）$E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】（B）

【解析】根据题设，由于 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

于是，$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n}\right),\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$，从而，

$$E(\hat{\theta})=E(\bar{X}-\bar{Y})=E\bar{X}-E\bar{Y}=\mu_1-\mu_2=\theta,$$

$$\begin{aligned}D(\hat{\theta})&=D(\bar{X}-\bar{Y})=D\bar{X}+D\bar{Y}-2\operatorname{cov}(\bar{X},\bar{Y})\\&=D\bar{X}+D\bar{Y}-2\rho\sqrt{D\bar{X}}\sqrt{D\bar{Y}}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.\end{aligned}$$

综上可知，故选项（B）为正确选项.

(10) 设总体 X 的概率分布为 $P(X=1)=\dfrac{1-\theta}{2}, P(X=2)=P(X=3)=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值$1,3,2,2,1,3,1,2$，可得$\theta$的最大似然估计值为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{4}$.　　（B）$\dfrac{3}{8}$.　　（C）$\dfrac{1}{2}$.　　（D）$\dfrac{5}{2}$.

【答案】（A）

【解析】根据题设，则可得总体 X 的似然函数为

$$L(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5,$$

对似然函数 $L(\theta)$ 两边取对数可得

$$\ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta)-3\ln 2-5\ln 4.$$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{3}{\theta-1}+\dfrac{5}{1+\theta}=0$，由此可得$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

因此，选项（A）为正确选项.

二、填空题：11–16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 若$y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$______.

【答案】$\dfrac{1}{2e}\sin e^{-1}$.

【解析】根据题设，由于 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=-\sin e^{-\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{x}}\left.\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right|_{x=1}=\frac{\sin e^{-1}}{2e}.$$

(12) $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$___.

【答案】6.

【解析】根据题设，则

$$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}d(9-x^2)+\int_{3}^{5}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}d(x^2-9)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\sqrt{5}}^{3}+2(x^2-9)^{\frac{1}{2}}\Big|_{3}^{5}\right]=6.$$

(13) 设平面区域 D 由 $y=\sqrt{x}\sin\pi x(0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，则绕轴旋转所围成的旋转体积为______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】根据题设，则所求的旋转体的体积为

$$\int_0^1\pi\left(\sqrt{x}\sin\pi x\right)^2dx=\pi\int_0^1 x\sin^2\pi x dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x(1-\cos 2\pi x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

(14) $\Delta y_t=t$ 的通解为______.

【答案】

【解析】根据题设，由$\Delta y_t=t$ 化简可得 $y_{t+1}-y_t=t$，则齐次形式的特征方程为$r-1=0$，故$r=1$.

于是，根据题干可设特解为 $y_t^*=(at+b)t$，代入方程 $y_{t+1}-y_t=t$ 后可得$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$，故方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为$C+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t$.

(15) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

【答案】-5.

【解析】根据题设和行列式的定义，可知行列式的值为取自不同行和不同列元素乘积的代数和.

因此在 $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\ 1 & x & 2 & -1\\ 2 & 1 & x & 1\\ 2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中，含有 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-x\cdot 1\cdot x\cdot x-2x\cdot x\cdot x\cdot 2=-5x^3,$$

所以 x^3 项的系数为-5 .

(16) 甲，乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为___.

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】根据题设，可得随机变量 X 与 Y 的联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

由此可得，

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}.$$

于是，

$$EX=EY=\frac{1}{2},DX=DY=\frac{1}{4},\quad EXY=\frac{3}{10}.$$

因此，

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题：17—22 小题，共 70 分.

（17）（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 α 的值.

【答案】 $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e}-e\right)$.

【解析】根据题设，若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，则

$$\lim_{x\to0^+}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right].$$

又因

$$\lim_{x\to0^+}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}\alpha+\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}\alpha+e,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}\alpha+\lim_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}\alpha+e^{-1},$$

故由 $\frac{\pi}{2}\alpha+e=-\frac{\pi}{2}\alpha+e^{-1}$，可得 $\alpha=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e}-e\right)$.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln x+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的值.

【答案】函数 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 处取极小值2，在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处取极小值 $\frac{1}{2}-2\ln 2$.

【解析】根据题设，由 $f(x,y)=2\ln x+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$，可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x^2+x-1-y^2}{x^3},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2}.$$

于是由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0\\ \frac{y}{x^2}=0\end{cases}$，可解得驻点为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\ y_1=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=0\end{cases}$.

又因 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-2x^2-2x+3+3y^2}{x^4},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^3},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}$，所以

当 $x_1=\frac{1}{2},y_1=0$ 时，

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=\frac{1}{2},y=0}=24,B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=\frac{1}{2},y=0}=0,C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x=\frac{1}{2},y=0}=4,$$

于是由 $AC-B^2>0,A>0$，可知函数 $f(x,y)$ 在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处取极小值 $\frac{1}{2}-2\ln 2$.

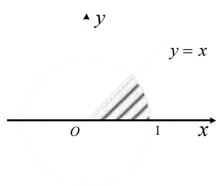
当 $x_2=-1,y_2=0$ 时，

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=-1,y=0}=3,B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=-1,y=0}=0,C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x=-1,y=0}=1,$$

于是由 $AC-B^2>0,A>0$，可知函数 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 处取极小值2.

（19）（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分， 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)dxdy$.



【答案】 $\frac{1}{8}(e-1)^2$.

【解析】

【解法一】如图，根据题设，则可得

$$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{r^2(1+\sin 2\theta)}r^3\cos 2\theta dr=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{r^2(1+\sin 2\theta)}d\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{r^2(1+\sin 2\theta)}d(r^2(1+\sin 2\theta))$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r(e^{2r^2}-e^{r^2})dr=\frac{1}{4}\int_0^1(e^{2r^2}-e^{r^2})dr^2$$

$$=\frac{1}{8}(e-1)^2.$$

【解法二】如图，根据题设，则可得

$$\iint_D e^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{r^2(1+\sin 2\theta)}r^2\cos 2\theta\, dr^2 \overset{r^2=t}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{t(1+\sin 2\theta)}t\cos 2\theta dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}d\theta\int_0^1 t de^{t(1+\sin 2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}\left(t\cdot e^{t(1+\sin 2\theta)}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{t(1+\sin 2\theta)}dt\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}\left(e^{1+\sin 2\theta}-\frac{e^{1+\sin 2\theta}}{1+\sin 2\theta}+\frac{1}{1+\sin 2\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin 2\theta}\left(e^{1+\sin 2\theta}-\frac{1}{1+\sin 2\theta}e^{1+\sin 2\theta}+\frac{1}{1+\sin 2\theta}\right)d(1+\sin 2\theta)$$

$$\overset{1+\sin 2\theta=u}{=}\frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{e^u}{u}-\frac{e^u}{u^2}+\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=\frac{1}{8}(e-1)^2.$$

（20）（本题满分 12 分）

设 n 为正整数， $y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(I) 求 $y_n(x)$；

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】（I） $y_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$；（II）收敛域为 $[-1,1]$， $S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, x\in[-1,1)\\ 1, x=1\end{cases}$

【解析】（I）根据题设，解微分方程 $xy'-(n+1)y=0$，可得 $y_n(x)=Cx^{n+1}$.

又因 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$，则 $C=\frac{1}{n(n+1)}$，因此 $y_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

（II）根据第（I）问，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

由于 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|=1$，则收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$，于是收敛区间为 $(-1,1)$.

又因当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 均收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

下面计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数.

当$x\in[-1,1]$ 时，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ ，则通过对 $S(x)$ 逐项求导可得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}=-\ln(1-x).$$

于是，

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x -\ln(1-t)\,dt=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x),x\in[-1,1),$$

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=1.$$

因此，

$$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x,x\in[-1,1)\\ 1,x=1\end{cases}$$

（21）（本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【答案】当 $a=1,b=1$ 时，则可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

当 $a=-1,b=3$ 时，则可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

【解析】

【解析】根据题设，则由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

可知矩阵 A 的特征值为$\lambda_1=b,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$.

又因 A 仅有两个不同的特征值，故$b=1$或$b=3$.

当$b=1$时， $\lambda=1$ 为 A 的二重特征值，故由 A 可相似对角化可知， $3-r(E-A)=2$ ，于是

$$a=1,\ A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 A 的特征值为$1,1,3$，因此，由$(E-A)x=0$可得 A 的属于特征值$\lambda=1$的线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由$(3E-A)x=0$可得 A 的属于特征值$\lambda=3$线性无关的特征向量为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 P 可逆，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

当$b=3$时， $\lambda=3$ 为 A 的二重特征值，故由 A 可相似对角化可知， $3-r(3E-A)=2$ ，于是

$$a=-1,\ A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

由于 A 的特征值为$1,3,3$，因此，由$(E-A)x=0$可得 A 的属于特征值$\lambda=1$的线性无关的特征向量为$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$；

由$(3E-A)x=0$可得 A 的属于特征值$\lambda=3$线性无关的特征向量为$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长的一段长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(I) 求 X 的概率密度；（II）求 Z 的概率密度；（III）求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

【答案】（I）$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$；（II）$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2} & z\geq 1\\ 0, & others\end{cases}$；（III）$2\ln 2-1$.

【解析】（I）根据题设，则 $X\sim U(0,1)$，故

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}.$$

(II) 由于 $Y=2-X$，故 $Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2}{X}-1$，因此

当 $z<1$时 $F_Z(z)=0$.

当 $z\geq 1$时

$$F_Z(Z)=P(Z\leq z)=P\left(\frac{2}{X}-1\leq z\right)$$
$$=P\left(\frac{2}{X}\leq z+1\right)=P\left(X>\frac{2}{z+1}\right)$$
$$=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}dx=\frac{z-1}{z+1}.$$

综上可得，$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ \dfrac{z-1}{z+1}, & z\geq 1\end{cases}$.

因此，$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z\geq 1\\ 0, & others\end{cases}$

路灯在职研究生招生信息网涵盖在职研究生报考的各个环节，是集咨询、分析、报考、互动等多平台于一身的综合性在职研门户网站。

• 同等学力 • 专业硕士 • 国际硕士 • 中外合办

• 在职博士 • 国际博士 • 高级研修 • 高端培训

扫一扫，关注路灯在职研究生官方微信，及时获取招生资讯、报考常见问题、备考经验分享等信息！还有免费的人工在线答疑服务！

路灯在职研究生 QQ 交流群：QQ 598070943 全国统一报名咨询电话：40000-52125

更多专业硕士免费备考资料下载，历年真题，考试大纲，大纲解析，复习指导等，应有尽有！

思想政治理论： https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=148

英语一： https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=138

数学二： https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=132

西医综合： https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=376