

2021 年全国硕士研究生入学统一考试（数学二）试题及答案解析（完整版）

一、选择题：1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1)dt$ 是 x^7 的 ()

(A) 低阶无穷小. (B) 等价无穷小 (C) 高阶无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】 (C)

【解析】 根据题设, 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1)dt}{x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^{x^6} - 1)}{7x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^7}{7x^6} = 0,$$

可知 $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1)dt$ 是 x 的高阶无穷小, 即选项 (C) 为正确选项.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处 ().

(A) 连续且取极大值. (B) 连续且取极小值. (C) 可导且导数为 0. (D) 可导且导数不为 0.

【答案】 (D)

【解析】 根据题设, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

又因

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且导数不为 0, 即选项 (D) 为正确选项.

(3) 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2cm/s , -3cm/s , 当底面半径为 10cm , 高为 5cm 时, 圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

(A) $125\pi\text{cm}^3/\text{s}$, $40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

(B) $125\pi \text{ cm}^3 / \text{s}, -40\pi \text{ cm}^2 / \text{s}.$

(C) $-100\pi \text{ cm}^3 / \text{s}, 40\pi \text{ cm}^2 / \text{s}.$

(D) $-100\pi \text{ cm}^3 / \text{s}, -40\pi \text{ cm}^2 / \text{s}.$

【答案】 (C)

【解析】 根据题设, 可知

$$V(t) = \pi r^2(t) \cdot h(t).$$

于是,

$$V'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t) + \pi r^2(t) \cdot h'(t),$$

$$V'_{\substack{r=10 \\ h=5}} = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 \times 5 + \pi \cdot 100 \cdot (-3) = -100\pi \text{ cm}^3 / \text{s}.$$

又因 $S(t) = 2\pi r^2(t) + 2\pi r(t) \cdot h(t)$, 于是

$$S'(t) = 2\pi \cdot 2r(t) \cdot r'(t) + 2\pi r'(t)h(t) + 2\pi r(t)h'(t).$$

将 $r=10\text{cm}, h=5\text{cm}, r'(t)=2\text{cm}/\text{s}, h'(t)=-3\text{cm}/\text{s}$ 代入上式, 则可得

$$S'(t) = 2\pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 5 + 2\pi \cdot 10 \cdot (-3) = 40\pi \text{ cm}^2 / \text{s}.$$

故选项 (C) 为正确选项.

(4) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ().

(A) $(e, +\infty).$ (B) $(0, e).$ (C) $\left(0, \frac{1}{e}\right).$ (D) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right).$

【答案】 (A)

【解析】 根据题设, $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

由 $f'(x) = a - \frac{b}{x} = 0$ 可得 $x = \frac{b}{a}$, 列表分析如下:

x	$\left(0, \frac{b}{a}\right)$	$\frac{b}{a}$	$\left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调减少	极小值	单调增加

由此可知，若函数 $f(x) = ax - b \ln x$ ($a > 0$) 有2个零点，则

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = b - b \ln \frac{b}{a} < 0,$$

于是， $\frac{b}{a} > e$ ，即选项 (A) 为正确选项。

(5) 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 的2次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$ ，则

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{2}$
(C) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$ (D) $a = 0, b = \frac{1}{2}$

【答案】(D)

【解析】根据题设， $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 的2次泰勒多项式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_n(x).$$

又因

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + ax + bx^2,$$

且

$$f'(x) = \sec x \cdot \tan x, \quad f''(x) = \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x,$$

故 $a = f'(0) = 0$, $b = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$ ，因此，选项 (D) 为正确选项。

(6) 设函数 $f(x, y)$ 可微，且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ ，则 $df(1, 1) =$ ()

- (A) $dx + dy$. (B) $dx - dy$. (C) dy . (D) $-dy$.

【答案】(C)

【解析】根据题设，对方程 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ 两边关于变量 x 求导，可得

$$f'_1(x+1, e^x) + f'_2(x+1, e^x) \cdot e^x = (x+1)(3x+1). \quad (1)$$

对方程 $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ 两边关于变量 x 求导, 可得

$$f'_1(x, x^2) + f'_2(x, x^2) \cdot 2x = 4x \ln x + 2x. \quad (2)$$

若将 $x=0$ 代入①式, 将 $x=1$ 代入②式, 则可得

$$\begin{cases} f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1 \\ f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2 \end{cases}$$

由此解出 $f'_1(1, 1)=0$, $f'_2(1, 1)=1$, 于是 $df(1, 1)=f'_1(1, 1)dx+f'_2(1, 1)dy=dy$.

因此, 选项 (C) 为正确选项.

(7) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)dx = (\quad)$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

【答案】 (B)

【解析】 根据题设, 由定积分定义可知

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{1}{n},$$

其中 $\xi_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $\frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$, 故选项 (B) 为正确选项.

(8) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 (\quad) .

(A) 2; 0. (B) 1; 1. (C) 2; 1. (D) 1; 2.

【答案】 (B)

【解析】 根据题设, 由拉格朗日配方法, 可得

$$\begin{aligned}
 f &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \\
 &= 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3) + 2x_3x_1 \\
 &= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_2x_3 \\
 &= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2.
 \end{aligned}$$

令 $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, y_2 = x_2 - x_3$, 则

$$f = Cy^2 - \frac{1}{2}y_2^2, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此, 所求二次型的正惯性指数与负惯性指数分别为 1 和 1, 即选项 (B) 为正确选项.

(9) 设三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 β_1, β_2 线性表出, 则

(A) $AX = O$ 的解均为 $BX = O$ 的解.

(B) $A^T X = O$ 的解均为 $B^T X = O$ 的解.

(C) $BX = O$ 的解均为 $AX = O$ 的解.

(D) $B^T X = O$ 的解均为 $A^T X = O$ 的解.

【答案】(D)

【解析】根据题设, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 故存在矩阵 C , 使得 $BC = A$.

若 $B^T X = O$, 则 $A^T X = (BC)^T X = C^T B^T X = O$, 所以 $B^T X = O$ 的解均为 $A^T X = O$ 的解, 故选项 (D) 为正确选项.

(10) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 若存在下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得 PAQ 为

对角阵, 则 P, Q 可以分别为 ()

$$(A) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$(B) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$(C) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$(D) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

【答案】 (C)

【解析】 【解法一】

根据题设, 由于

$$\text{对于选项 (A), } PAQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right);$$

$$\text{对于选项 (B), } PAQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & 2 & -5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$\text{对于选项 (C), } PAQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & 2 & -5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$\text{对于选项 (D), } PAQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & -5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 6 & 13 & -23 \end{array} \right)$$

可知, 则选项 (C) 为正确选项.

【解法二】 由于

$$\begin{aligned} (A, E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\text{故 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

又因,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

综上所述, 故 (C) 为正确选项.

二、填空题: 11-16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

$$(11) \int_{-\infty}^{+\infty} x 3^{-x^2} dx = \underline{\quad}.$$

【答案】 $\frac{1}{\ln 3}$.

【解析】根据题设, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x 3^{-x^2} dx &= \int_0^{+\infty} x 3^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^0 x 3^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} x 3^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} t 3^{-t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x 3^{-x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} d(-x^2) = - \frac{1}{\ln 3} \left[\frac{1}{3} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\ln 3} \end{aligned}$$

$$(12) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由参数方程 } \begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases} \text{ 确定, 则 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\quad}$$

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】根据题设, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4te^t + 2t \frac{d^2 y}{dx^2}}{2e^t + 1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(4e^t + 4te^t + 2)(2e^t + 1) - (4te^t + 2t)2e^t}{(2e^t + 1)^3},$$

将 $t=0$ 代入, 则可得 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{2}{3}$.

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】1

【解析】将 $x=0, y=2$ 代入方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$, 可得 $z=1$.

方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 两边对 x 求导得

$$z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2y}{1+4x^2 y^2} = 0.$$

代入 $x=0, y=2, z=1$, 则可得 $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 2) = 1$.

(14) 已知函数 $f(t) = \int_1^t dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $f'(\frac{\pi}{2}) = \pi \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{u^3} du - \frac{\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

【解析】根据题设, 对题干中的积分交换积分次序可得

$$\begin{aligned} f(t) &= - \int_1^{\sqrt{t}} dy \int_{y^2}^t \sin \frac{x}{y} dx - \int_1^t y \left(\cos \frac{t}{y} - \cos y \right) dy \\ &= \int_1^{\sqrt{t}} y \cos \frac{t}{y} dy - \int_1^{\sqrt{t}} y \cos y dy \\ &= t^2 \int_{\sqrt{t}}^t \frac{\cos u}{u^3} du - \int_1^{\sqrt{t}} y \cos y dy. \end{aligned}$$

于是,

$$f'(t) = 2t \int_{\sqrt{t}}^t \frac{\cos u}{u^3} du + t^2 \left(\frac{\cos t}{t^3} - \frac{\cos \sqrt{t}}{t^{3/2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) - \sqrt{t} \cos \sqrt{t},$$

$$\text{故 } f'(\frac{\pi}{2}) = \pi \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{u^3} du - \frac{\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(15) 微分方程 $y'' - y = 0$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), C_1, C_2, C_3 \in R$

【解析】根据题设，微分方程 $y'' - y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$ ，由此解得

$$r_1 = 1, r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

故方程 $y'' - y = 0$ 的通解为

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), C_1, C_2, C_3 \in R.$$

(16) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

【答案】 -5.

【解析】根据题设和行列式的定义，可知行列式的值为取自不同行和不同列元素乘积的代数和.

因此在 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中，含有 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2134)} \underset{12}{a} \underset{21}{a} \underset{33}{a} \underset{44}{a} + (-1)^{\tau(4231)} \underset{14}{a} \underset{22}{a} \underset{33}{a} \underset{41}{a} = -x \cdot 1 \cdot x \cdot x - 2x \cdot x \cdot x \cdot 2 = -5x^3,$$

所以 x^3 项的系数为-5.

三、解答题：17—22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程

或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$

【答案】 $\frac{1}{2}.$

【解析】根据题设，则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) \sin x - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) \sin x - e^x + 1}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x + \left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) \cos x - e^x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \sin x + \int_0^x e^{t^2} dt \cos x + \cos x - 1 + 1 - e^x}{2x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \frac{xx}{1+x}$ ，求函数 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

【答案】函数的凹区间为 $(0, +\infty)$, $(-\infty, -1)$ ，凸区间为 $(-1, 0]$;

渐近线方程为 $x = -1$ ， $y = x - 1$ ， $y = -x + 1$

【解析】根据题设， $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 1+x & x > 0 \\ -x^2 & x \leq 0, \text{ 且 } x \neq -1 \\ 1+x & x \leq 0, \text{ 且 } x \neq -1 \end{cases}$,

由于

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{1+x} = 0, f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 - 0}{1+x} = 0,$$

所以 $f'(0) = 0$.

于是，

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} - 1 & x < 0, x \neq -1 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{-1}{(x+1)^2} + 1 & x > 0 \end{cases}$$

又因

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \right) = -2, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{(1+x)^2} + 1 \right) = 2,$$

所以 $f'(0)$ 不存在, 因此,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x+1)^3} & x < 0, \text{ 且 } x \neq -1 \\ \frac{2}{(x+1)^3} & x > 0 \end{cases}$$

列表分析如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	不存在	+
$f(x)$	凹		凸		凹

故函数 $f(x)$ 的凹区间为 $(0, +\infty)$, $(-\infty, -1)$, 凸区间为 $(-1, 0)$.

下面计算渐近线.

因为 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, 所以 $x = -1$ 为垂直渐近线.

设斜渐近线为 $y = kx + b$, 则有两种情况:

$$(1) \quad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(1+x)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = -1, \text{ 则斜渐近}$$

线为 $y = x - 1$.

$$(2) \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x(1+x)} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{1+x} + x \right) = 1, \text{ 则斜渐近线为 } y = -x + 1.$$

则斜渐近线为 $y = -x + 1$.

综上可知, 函数 $f(x)$ 的渐近线方程为

$$x = -1, y = x - 1, y = -x + 1.$$

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6} x^2 - x + C$, L 为曲线 $y = f(x) (4 \leq x \leq 9)$, 记 L 的长度为 S , L 绕 x

轴旋转的旋转曲面的面积为 A , 求 S 和 A .

【答案】 $S = \frac{22}{3}$.

【解析】根据题设, 可得 $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3} x - 1$, 于是 $f(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$.

于是

$$S = \int_4^9 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_4^9 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^2} dx = \int_4^9 \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{22}{3}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_4^9 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_4^9 2\pi \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \pi \int_4^9 \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \pi \int_4^9 \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \pi \int_4^9 \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \frac{425}{9} \pi. \end{aligned}$$

(20) (本题满分 12 分)

函数 $y = y(x)$ 的微分方程 $xy' - 6y = -6$, 满足 $y(3) = 10$.

(I) 求 $y(x)$

(II) P 为曲线 $y = y(x)$ 上的一点, 曲线 $y = y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_y , 为使 I_y 最小, 求 P 的坐标.

【答案】 $y = 1 + \frac{1}{3}x^6$

【解析】

① 根据题设, 由微分方程 $xy' - 6y = -6$, 可得 $y' - \frac{6}{x}y = -\frac{6}{x}$, 于是

$$y = e^{\int \frac{6}{x} dx} \left[\int \left(-\frac{6}{x} \right) e^{-\int \frac{6}{x} dx} dx + C \right] = x^6 \left(\frac{1}{x^6} + C \right) = 1 + Cx^6,$$

代入初始条件 $y(1) = 10$, 则 $C = \frac{1}{3}$. 因此 $y = 1 + \frac{1}{3}x^6$.

② 设 $P(x, y)$, 则过 P 点的法线方程为 $Y - y = -\frac{1}{2x^5}(X - x)$.

令 $X = 0$, 则 $I_y = Y = 1 + \frac{x^6}{3} + \frac{1}{2x^4}$. 由于 I_y 为偶函数, 故只考察 I_y 在 $(0, +\infty)$ 上的最值即可.

令 $I'_y = 2x^5 - \frac{2}{x^5} = 0$, 由此解得 $x = 1$, 列表分析如下:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
I'_y	$-$	0	$+$
I_y	\searrow	极小值	\nearrow

由此可知 I_y 在 $x = 1$ 处取极小值, 即也是最小值, 且 $I(1) = \frac{11}{6}$.

同理可知在 $(-\infty, 0)$ 上, I_y 在 $x = -1$ 处取极小值, 即也是最小值, 且 $I(-1) = \frac{11}{6}$.

综上, 所求 P 的坐标为 $\left(\pm 1, \frac{4}{3} \right)$.

(21) (本题满分 12 分) 设 D 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 与 x 轴围成, 求 $\iint_D xy dx dy$.

【答案】 $\frac{1}{48}$

【解析】 根据题设, 可知

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot r dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 \sin 2\theta dr \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \cdot \sin 2\theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d \cos 2\theta \\
 &= \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

(22) (本题满分 12 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值, 若 A 相似于对角矩阵, 求 a, b

的值, 并求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【答案】当 $a=1, b=1$ 时, 则可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

当 $a=-1, b=3$ 时, 则可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

【解析】根据题设, 则由

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda-b \end{pmatrix} = (\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

可知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$.

又因 A 仅有两个不同的特征值, 故 $b=1$ 或 $b=3$.

当 $b=1$ 时, $\lambda=1$ 为 A 的二重特征值, 故由 A 可相似对角化可知, $3-r(E-A)=2$, 于是

$$a=1, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 A 的特征值为 $1, 1, 3$, 因此, 由 $(E-A)x=0$ 可得 A 的属于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向

量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由 $(3E - A)x = 0$ 可得 A 的属于特征值 $\lambda = 3$ 线性无关的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P \text{ 可逆, 且 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

当 $b = 3$ 时, $\lambda = 3$ 为 A 的二重特征值, 故由 A 可相似对角化可知, $3 - r(3E - A) = 2$, 于是

$$a = -1, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 A 的特征值为 $1, 3, 3$, 因此, 由 $(E - A)x = 0$ 可得 A 的属于特征值 $\lambda = 1$ 的线性无关的特征向量为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

由 $(3E - A)x = 0$ 可得 A 的属于特征值 $\lambda = 3$ 线性无关的特征向量为 $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{令 } P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P \text{ 可逆, 且 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

路灯在职研究生招生信息网涵盖在职研究生报考的各个环节，是集咨询、分析、报考、互动等多平台于一身的综合性在职研门户网站。

- [同等学力](#) • [专业硕士](#) • [国际硕士](#) • [中外合办](#)
- [在职博士](#) • [国际博士](#) • [高级研修](#) • [高端培训](#)

扫一扫，关注路灯在职研究生官方微信，及时获取招生资讯、报考常见问题、备考经验分享等信息！还有免费的人工在线答疑服务！



路灯在职研究生 QQ 交流群：**QQ 598070943** 全国统一报名咨询电话：**40000-52125**

更多专业硕士免费备考资料下载，历年真题，考试大纲，大纲解析，复习指导等，应有尽有！

思想政治理论： <https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=148>

英语一： <https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=138>

数学二： <https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=132>

西医综合： <https://www.125yan.com/zyss/zhenti/?zy=376>