2020 年金融专硕MF考研数学三真题及解析（完整版）

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}$

A. $b\sin a$

B. $b\cos a$

C. $b\sin f(a)$

D. $b\cos f(a)$

答案：B

解析：

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-a]}{x-a}\cos\xi=b\cos a.$$

（其中ξ介于 $f(x)$ 与a 之间）

∴选 B

2. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 第二类间断点个数

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

答案：C

解析：

$x=0, x=2, x=1, x=-1$ 为间断点

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1}\ln|1+x|}{-2x}=-\frac{e^{-1}}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln|x+1|}{x}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

$x=0$ 为可去间断点

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=2$ 为第二类间断点

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=1$ 为第二类间断点

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=-1$ 为第二类间断点

3.设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是奇函数

B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是偶函数

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是奇函数

D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是偶函数

答案：A

解析：

$$F(x)=\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=\cos f(x)+f'(x)$$

由 $f(x)$ 为奇函数知， $f'(x)$ 为偶函数.

$\cos f(x)$ 为偶函数.故 $F'(x)$ 为偶函数.

$F(x)$ 为奇数 $\therefore$ 选 A

4. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为（-2，6），则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

A.（-2，6）

B.（-3，1）

C.（-5，3）

D.（-17，15）

答案：B

解析：

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho=\frac{1}{R_1}=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho_2=\rho_1=\dfrac{1}{4}$ $\therefore R_2=4.$

$\therefore R_2'=\sqrt{R_2}=2$，故所求收敛域为（-3，1），

∴选 B.

5.设 4 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $A^*x=0$ 的通解为

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

答案：C

解析：

∵A 不可逆

∴$|A|=0$

∵ $A_{12}\neq 0$ ∴ $r(A)=3$

∴ $r(A^*)=1$

∴ $A^*x=0$ 的基础解系有 3 个线性无关的解向量.

∵ $A^*A=|A|E=0$

∴A 的每一列都是 $A^*x=0$ 的解

又∵ $A_{12}\neq 0$ ∴$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

∴ $A^*x=0$ 的通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，故选 C.

6.设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3 为 A 的属于-1

的特征向量，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$

B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

C. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$

D. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

答案：D

解析：

$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$

$A\alpha_3=-\alpha_3$

$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore P$ 的 1，3 两列为 1 的线性无关的特征向量 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$

P 的第 2 列为 A 的属于-1 的特征向量 $-\alpha_3$.

$\therefore P=(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

∴选 D

7. 设 A,B,C 为三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{12}$

答案：D

解析：

$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\overline{B\cup C})=P(A)-P[A(B\cup C)]$

$$=P(A)-P(AB+AC)$$
$$=P(A)+P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(B\bar{A}\bar{C})=P(B\overline{A\cup C})=P(B)-P[B(A\cup C)]$$
$$=P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(C\bar{B}\bar{A})=P(C\overline{B\cup A})=P(C)-P[C\cup(B\cup A)]$$
$$=P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{12}$$

$$P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

8.设随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

答案：C

解析：

$$D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]=\frac{1}{3}[DX+DY]+\frac{2}{3}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$=\frac{1}{3}\left[DX+DY\right]+\frac{2}{3}\rho\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$

$=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$

$E\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]=0$

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1).$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定的位置上

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=$____.

解析：

$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}[y+\cos(x+y)],\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}[x+\cos(x+y)],\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=-1$

$\therefore\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

10. 曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点（0，-1）处的切线方程为________.

解析：

$1+y'+e^{2xy}(2y+2xy')=0$ ①

将 $x=0,y=-1$ 代入①得 $y'=1=k.$

$\therefore y+1=1(x-0)$

即 $y=x-1.$

11. Q 表示产量，成本 $C(Q)=100+13Q$，单价 p，需求量 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2.$ 则工厂取得利润最大时的产量为______.

解析：

$$
\begin{aligned}
L &= QP - C(Q)\\
&= Q\left(\frac{800}{Q+2} - 3\right) - 100 - 13Q\\
&= \frac{800Q}{Q+2} - 16Q - 100
\end{aligned}
$$

$$L'(Q) = \frac{1600 - 16(Q+2)^2}{(Q+2)^2} = 0$$

$$\therefore Q = 8$$

12. 设平面区域 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{2} \le y \le \frac{1}{1+x^2},\ 0 \le x \le 1\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体体积为______.

解析：

$$
\begin{aligned}
&\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dy + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dy\\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} 4y^2 dy + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y} - 1\right) dy\\
&= \frac{4}{3}\pi y^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi\left[\ln y - y\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\\
&= \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{8} + \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\\
&= \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

解析：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14. 随机变量 X 的概率分布 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}, k=1,2,3\cdots, Y$ 表示 X 被 3 除的余数， 则 $E(Y)=$______.

解析：

$P\{Y=0\}=P\{X=3k, k=1,2.\cdots\}$

$P\{Y=1\}=P\{X=3k+1, k=0,1,2.\cdots\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+1}}$

$P\{Y=2\}=P\{X=3k+2, k=0,1,2.\cdots\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+2}}$

$$E(Y)=1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+1}}+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{8}{7}$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 a,b 为常数，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$，当 $n\to\infty$ 时为等价无穷小，求 a,b.

15.【解】

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}n^a\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}\right]$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\lim_{n\to\infty}n^a\cdot\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right]$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\lim n^a\cdot\mathrm{e}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{b}\lim n^a\cdot\mathrm{e}\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{b}\lim n^{a-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}$$

$\therefore a-1=0$

$\therefore a=1 \quad \frac{1}{b}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)=1$

$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$

16. 求二元函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值。

解析：

.求一阶导可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{12}\end{cases}$

求二阶导可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 y}=-1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y$$

当 $x=0, y=0$ 时. $A=0.B=-1.C=0^-$

$AC-B^2<0$ 故不是极值.

当 $x=\frac{1}{6}$ $y=\frac{1}{12}$ 时

$A=1.B=-1.C=4.$

$AC-B^2>0.A=1>0$ 故 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 且极小值

极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+8\left(\frac{1}{12}\right)^3-6\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}$

17.若 $y''+2y'+5y=0,f(0)=1,f'(0)=-1$，则

（1）求 $f(x)$

（2）$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum_{i=1}^{n}a_n$

解析：

（1）$y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+5=0$

$\therefore r_{1,2}=-1\pm 2i$

$\therefore\ y(x)=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

$y'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\mathrm{e}^{-x}(-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x)$

$\because\ y(0)=1,y'(0)=-1$

$\therefore c_1=1,c_2=0$

$\therefore\ y(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$

（2）$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$

$$=-\int_{n\pi}^{+\infty}\cos 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x}=-\cos 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}+\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=-\mathrm{e}^{-n\pi}-2\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-n\pi}+2\int_{n\pi}^{+\infty}\sin 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-n\pi}+2\sin 2x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}-2+\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore 5a_n=-\mathrm{e}^{-n\pi}$$

$$\therefore a_n=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}$$

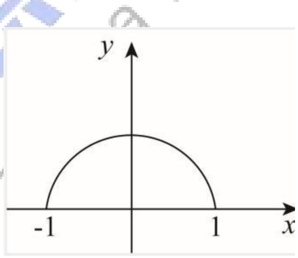
$$\sum_{i=1}^{n}a_i=-\frac{1}{5}[\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}+\cdots+\mathrm{e}^{-n\pi}]$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\pi}[1-\mathrm{e}^{-n\pi}]}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$$

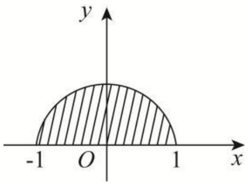
18. $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{array}\right.\right\}$$



求 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma$

解析：



积分区域 D 如图： $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 两边积分得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=\sin t}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3\pi}{16}$$

$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

所以$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{3\pi}{16}$

$f(x,y) = y\sqrt{1-x^2} + \dfrac{3\pi}{16}x$

从而$\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \dfrac{3\pi}{16}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{3}{16}\pi\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3}{16}\pi\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3}{16}\pi\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=\sin t}{=} \frac{3\pi}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3\pi}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3\pi}{16}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{256}$$

19. $f(x)$ 在$[0,2]$上具有连续导数，$M = \max\{|f(x)|\}, x\in[0,2]$

（1）证$\exists\xi\in[0,2]$ $M \le |f'(\xi)|$

（2）若$\forall x\in[0,2]$ $|f'(x)| \le M$ 则$M = 0$

解析：

证明：（1）由$M = \max\{|f(x)|\}$，$x\in[0,2]$知存在$c\in[0,2]$，使$|f(c)| = M$，

若$c\in[0,1]$由拉格朗日中值定理得至少存在一点$\xi\in(0,c)$，使

$f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c}=\dfrac{f(c)}{c}$

从而$|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{c}=\dfrac{M}{c}\geq M$

若$c\in(1,2]$，同理存在$\xi\in(c,2)$使

$f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}=\dfrac{-f(c)}{2-c}$

从而$|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{2-c}=\dfrac{M}{2-c}\geq M$

综上，存在$\xi\in(0,2)$，使$|f'(\xi)|\geq M$.

（2）若 $M>0$，则$c\neq 0,2$.

由 $f(0)=f(2)=0$ 及罗尔定理知，存在$\eta\in(0,2)$，使 $f'(\eta)=0$,

当$\eta\in(0,c]$时，

$f(c)-f(0)=\int_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x$

$M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|\leq\int_0^c|f'(x)|\mathrm{d}x<Mc,$

又 $f(2)-f(c)=\int_c^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$

$M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|\leq\int_c^2|f'(x)|\,dx\leq M(2-c)$

于是 $2M<Mc+M(2-c)=2M$ 矛盾.

故 $M=0$.

20. 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geq b$.

（1） 求a,b的值.

（2） 求正交矩阵Q.

解析：

（1）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$

由题意可知 $Q^{T}AQ = Q^{-1}AQ = B.$

$\therefore A$ 合同相似于 B

$\therefore \begin{cases} 1+4 = a+b \\ ab = 4 \end{cases} \quad a \geq b$

$\therefore a = 4. \quad b = 1$

（2）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^{2} - 5\lambda$

$\therefore A$ 的特征值为 0，5

当 $\lambda = 0$ 时，解 $(0E-A)x = 0$.得基础解为

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda = 5$ 时，解 $(5E-A)x = 0$ 得基础解为

$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

又 B 的特征值也为 0，5

当 $\lambda = 0$ 时，解 $(0E-B)x = 0$ 得

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha_2$

当 $\lambda = 5$ 时，解 $(5E-B)x = 0$ 得

$\beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1$

对 α_1, α_2 单位化

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

令 $Q_1=[\gamma_1,\gamma_2],Q_2=[\gamma_2,\gamma_1]$

则 $Q_1^TAQ_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&5\end{bmatrix}=Q_2^TBQ_2$

故 $Q_2Q_1^TAQ_1Q_2^T=B$

可令

$Q=Q_1Q_2^T$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

21.设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（1） 证明 P 为可逆矩阵

（2） 若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

解析：

(1) $\alpha\neq0$ 且 $A\alpha\neq\lambda\alpha$.

故 α 与 $A\alpha$ 线性无关.

则 $r(\alpha,A\alpha)=2$

则 P 可逆.

$AP = A(\alpha, A\alpha)$

$= (A\alpha, A^2 x)$

$= (\alpha A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

故$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(2)由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$

设 $(A^2 + A - 6E)\alpha = 0$
$(A + 3E)(A - 2E)\alpha = 0$

由$\alpha \neq 0$得$(A^2 + A - 6E)x = 0$有非零解

故$|(A + 3E)(A - 2E)| = 0$

得$|A + 3E| = 0$或$|A - 2E| = 0$

若$|(A + 3E)| \neq 0$则有$(A - 2E)\alpha = 0$故$A\alpha = 2\alpha$与题意矛盾

故$|A + 3E| = 0$同理可得$|A - 2E| = 0$

于是 A 的特征值为$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 2$.

A 有 2 个不同特征值故 $A\alpha$相似对角化

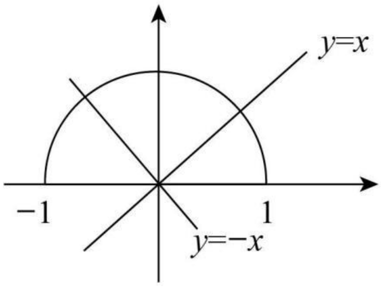
22.二维随机变量(X,Y)在$D = \left\{(x,y) \middle| 0 < y < \sqrt{1-x^2}\right\}$上服从均匀分布

$Z_1 = \begin{cases} 1 & X - Y > 0 \\ 0 & X - Y \le 0 \end{cases}$, $\quad Z_2 = \begin{cases} 1 & X + Y > 0 \\ 0 & X + Y \le 0 \end{cases}$

（1） 求(Z_1, Z_2)联合分布

（2） $\rho_{Z_1 Z_2}$

解析：

（1） 

(x, y) $\qquad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & 0<y<\sqrt{1-x^2}\\ 0, & 其他\end{cases}$

则 $P\{Z_1=0, Z_2=0\}=P\{X\le Y, X\le -Y\}=\dfrac{1}{4}$

$P\{Z_1=0, Z_2=1\}=P\{X\le Y, Y>-X\}=\dfrac{1}{2}$

$P\{Z_1=1, Z_2=0\}=P\{X>Y, X\le -Y\}=0$

$P\{Z_1=1, Z_2=1\}=P\{X>Y; X>-Y\}=\dfrac{1}{4}$

（2） Z_1, Z_2 的相关系数 $\rho=\dfrac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}$

$=\dfrac{EZ_1Z_2-EZ_1EZ_2}{\sqrt{EZ_1^2-(EZ_1)^2}\sqrt{EZ_2^2-(EZ_2)^2}}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\sqrt{\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}}=\dfrac{1}{3}$

23. 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

（1） 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>S+t\mid T>S\}$，其中 $S>0, t>0$.

（2） 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2\cdots, t_n$，若 m 已知，求

θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

解析：

（1） $P\{T>t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$P\{T>s+t|T>s\}=P\{T>t\}=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

（2）$f(t)=F'(t)=\begin{cases} m\theta^{-m}t^{m-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i, \theta)$

$=\begin{cases} m^n\theta^{mn}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m} & t_i\geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$

当$t_1\geq 0, t_2\geq 0, \cdots, t_n\geq 0$时

$L(\theta)=m^n\cdot\theta^{-mn}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

取对数$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m+1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$

求导数 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\theta^{-(m+1)}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 解得 $\theta=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

所以θ的最大似然估计值$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$