# 2020 年全国硕士研究生入学统一考试

# 数学（二）试题及答案

**一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．**

1 当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是（　　）

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$　　C. $\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$　　D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt$

解析：本题选 D.考查了无穷小量的阶的比较，同时考查了变上限积分的函数的求导方法、洛必达法则等。用求导定阶法来判断。在 $x \to 0^+$ 时，

$$\left(\int_0^x (e^{t^2}-1)dt\right)' = e^{x^2}-1 \sim x^2;$$

$$\left(\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt\right)' = \ln(1+\sqrt{x^3}) \sim x^{\frac{3}{2}};$$

$$\left(\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt\right)' = \sin\left(\sin x\right)^2 \cos x \sim x^2;$$

$$\left(\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)' = \sqrt{\sin^3(1-\cos x)}\sin x \sim x\sqrt{(\frac{x^2}{2})^3} \sim \frac{\sqrt{2}}{4}x^3|x|。$$

2 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C. 3　　D.4

解析：本题选 C.本题考查了间断点的概念与分类、极限的计算。

间断点有 $x=-1,0,1,2$，由于

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)} = -\frac{1}{2e};$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)} = \infty$$

3 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = (\quad)$

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

解析：本题选 A。本题考查了定积分的计算，主要内容是第二换元积分法。

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \overset{\arcsin\sqrt{x}=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t\cos t} 2\sin t\cos t dt = t^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

4.已知 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，当 $n\geq 3$ 时，$f^{(n)}(0)=$ (　　)

A. $-\frac{n!}{n-2}$　　B. $\frac{n!}{n-2}$　　C. $-\frac{(n-2)!}{n}$　　D. $\frac{(n-2)!}{n}$

解析：选 A。本题考查了函数在 0 处的高阶导数的计算。有泰勒公式求解：

$$f(x)=x^2\ln(1-x)=x^2(-x-\frac{1}{2}x^2-\cdots-\frac{1}{n-2}x^{n-2})+o(x^n)$$

$$\therefore \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{n-2}, f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2}。$$

5.关于 $f(x,y)=\begin{cases} xy, xy\neq 0, \\ x, y=0, \\ y, x=0, \end{cases}$ 给出下列结论：

（1）$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$　（2）$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$　（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

4（ ）$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$

其中正确的个数为（　　）

A.4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

解析：本题考查了分块函数在分界线上某点处的偏导数求法，二元函数极限与累次极限等计算。需要用到偏导数的定义式等。

(1) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$

(2)因为 $f(x,y)=\begin{cases} xy, xy\neq 0, \\ x, y=0, \\ y, x=0, \end{cases}$，当 $xy\neq 0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x}=y$，

此时 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y-1}{y}=\infty$

故 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在.

(3) 因为 $f(x,y)=\begin{cases} xy, xy\neq 0, \\ x, y=0, \\ y, x=0, \end{cases}$ 所以当 $xy\neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$，当 $y=0$ 时，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x=0$，当 $x=0$ 时，

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y=0$，所以点$(x,y)$沿着任意方向趋近于$(0,0)$时，极限均为 0,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(4)因为 $f(x,y)=\begin{cases} xy, xy\neq 0, \\ x, y=0, \\ y, x=0, \end{cases}$，所以当 $xy\neq 0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} xy=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$，当 $y=0$时，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$，

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{y\to 0} y=0$，综上 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

选 B。

6.设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则（ ）

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$ B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$ C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$ D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

解析：本题选 B。考查了函数的单调性，辅助函数构造等问题。

由 $f'(x)>f(x)>0$，可知 $f'(x)-f(x)>0$，可以构造辅助函数：$F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，

由导数符号可知函数 F(x)在$(-2,2)$ 单调递增。由 $F(0)>F(-1)$ 容易推得选B。

7.四阶矩阵 A 不可逆，$A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵A 的列向量组，则 $A^*X=0$ 的通解为（ ）

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$ D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

解析：本题选C。考查了线性齐次方程组通解的结构、伴随矩阵秩的公式、AA*的公式。

由于 $A_{12}\neq 0$，故 $r(A^*)\geq 1$，再由伴随矩阵秩的公式 $r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$，可知 $r(A^*)=1, r(A)=3$。

$A^*x=0$的基础解系由 3 个解向量构成。又因为 $A^*A=|A|E=O$，A 的每一列都$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 $A^*x=0$ 的解向量。只要找到 $A^*x=0$ 的 3 个无关解就构成基础解系。抓住 $A_{12}\neq 0$ 这一条件。由

$$AA^*=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{14} \end{bmatrix}=O$$ 可知，

$A_{11}\alpha_1+A_{12}\alpha_2+A_{13}\alpha_3+A_{14}\alpha_4=0$，因为 $A_{12}\neq 0$，因此$\alpha_2$可由$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，故$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性无关。原因是 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，若$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则其中有一个向量可由其余两个线性表示，秩就小于 3 了，可推出矛盾。因此$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$为基础解系，选C。

8. A 为3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2$ 为属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\alpha_3$ 为 A 的属于-1 的特征向量，满足

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$的可逆矩阵P 为（ ）

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

B. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　D. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

解析：本题选D。考查了矩阵相似对角化的相关理论与特征向量的性质。
矩阵 P 的每一列要与特征值对应起来。由题目已知，P 的第一列与第三列必须是 1 的特征向量，P 的第二列必须是-1 的特征向量。由特征向量的性质可知选D。

**二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．**

9. 设$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$______

答案：$-\sqrt{2}$

【解析】

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$，　$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{t}$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$，$\therefore\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

10. 求$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$.............

答案：$\dfrac{4\sqrt{2}}{9}-\dfrac{2}{9}$

【解析】：交换积分次序，

$\therefore$原式$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1\sqrt{x^3+1}\cdot x^2dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}d(x^3+1)=\dfrac{1}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{2}{3}\Big|_0^1$

原式$=\dfrac{2}{9}(2^{\frac{3}{2}}-1)=\dfrac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}-\dfrac{2}{9}$

1　设$z=\arctan\left[xy+\sin(x+y)\right]$，则$dz|_{(0,\pi)}=$.............

答案：$(\pi-1)dx-dy$

【解析】：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y+\cos(x+y)}{1+\left[xy+\sin(x+y)\right]^2}$，$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{x+\cos(x+y)}{1+\left[xy+\sin(x+y)\right]^2}$，代入（0，$\pi$），

$\therefore \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\pi+\cos\pi}{1+(\sin\pi)^2}=\pi-1$， $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\cos\pi}{1+(\sin\pi)^2}=-1$；

$\therefore dz\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)dx-dy$

12 斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为$g$，水密度为$\rho$，则三角形平板的一侧收到的压力为 ..............

答案：$\dfrac{1}{3}\rho g a^3$

【解析】$F=\int_0^a 2\rho g(a-y)ydy=2\rho g\int_0^a(ay-y^2)dy=2\rho g(\dfrac{1}{2}a^3-\dfrac{1}{3}a^3)=\dfrac{1}{3}\rho g a^3$

13. 设$y=y(x)$满足$y'+2y'+y=0$, 且$y(0)=0$，$y'(0)=1$，则$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ .............

答案：1

【解析】 $y'+2y'+y=0$,所以特解方程：$\lambda^2+2\lambda+1=0$，（$\lambda+1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-1$；

$\therefore y_{通}=(C_1+C_2x)e^{-x}$； $y'_{通}=e^{-x}(C_2-C_1-C_2x)$；又 $\because y(0)=0$，$y'(0)=1$；

$\therefore\begin{cases}C_1=0\\C_2-C_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}$，$\therefore y_{通}=xe^{-x}$

$\therefore\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx\overset{分部积分}{=}-e^{-x}(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]-\lim\limits_{x\to0^+}\left[-e^{-x}(x+1)\right]=1$

14. 求$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$ ............

答案： $a^4-4a^2$

【解析】$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}\overset{第4行加至第3行}{=}\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\0&0&a&a\\1&-1&0&a\end{vmatrix}\overset{第1列展开}{=}a\cdot\begin{vmatrix}a&1&-1\\0&a&a\\-1&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&-1&1\\a&1&-1\\0&a&a\end{vmatrix}$

继续将第 1 列展开，

原式$=a\cdot\left(a^3+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-1\\a&a\end{vmatrix}\right)+(-1)(-1)^{1+2}\cdot a\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\a&a\end{vmatrix}=a^4+2a\cdot(-2a)=a^4-4a^2$

**三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答 题纸指定位置上．**

15.（本题满分 10 分）.

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线。

【解析】：斜率 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{1}{\mathrm{e}}x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$

$$\underline{\underline{\text{令}t=\frac{1}{x}}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{\mathrm{e}t(1+t)^{\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-\mathrm{e}}{t}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1}{t}$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

所以斜渐近线方程为： $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

16.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解析】：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f(x)$ 连续，则

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

令 $xt=u$，则 $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}t$

当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

因为 $g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$

所以 $g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}$

$$\text{则 } g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq0\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,du\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}$$

$$= 1 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

则 $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$

所以 $g'(x)$在 $x=0$ 处连续

17.（本题满分 10 分）

求 $f(x) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值。

解：$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y(x,y) = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$

所以$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$所以驻点为$(0,0)$或$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$

$A = f''_{xx}(x,y) = 6x$

$B = f''_{xy}(x,y) = -1$

$C = f''_{yy}(x,y) = 48y$

代入$(0,0)$，此时 $AC - B^2 < 0$ 所以不是极值点

代入$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$，$AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$，所以 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}$ 为极小值

18.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且满足 $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}$

（I） 求 $f(x)$；

（II） 求曲线 $y = f(x), y = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $y$ 围成的图形绕 $x$ 轴旋转一周的体积。

【解析】（1）：由 $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ①

得 $2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}$

则 $2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{2x^2+x}{\sqrt{1+x^2}}$ ②

①×2−② 得：$3f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$

故$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x\in(0,+\infty)$

（2）体积：$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y g(y)\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$\overset{y=\sin t}{=}2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\pi\left[\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times 0\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

19.（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中区域 $D$ 由 $x=1, x=2, y=x$ 及 $x$ 轴围成.

【解析】：$\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\dfrac{r}{r\cos\theta}r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\left[\dfrac{1}{2}r^2\right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$

其中$\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\int\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan\theta\mathrm{d}\sec\theta$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta\left(\sec^2\theta-1\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\int\sec\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|-\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$

所以$\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right)+C$

所以$\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{3}{4}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

20.（本题满分 11 分）

已知 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$

（1）证明：$\exists\xi\in(1,2), s.t\, f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

（2）证明：$\exists\eta\in(1,2), s.t\, f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot e^{\eta^2}$

解答：$f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ 所以 $f(1)=0$，且 $f'(x)=e^{x^2}$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$

（1）构造 $F(x)=f(x)-(2-x)e^{x^2}$，则 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，

且 $F(1)=f(1)-e=-e<0, F(2)=f(2)-0=f(2)>0$，

由零点定理知 $\exists\xi\in(1,2)$, st $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)\xi^2$

（2）构造 $g(x)=\ln x$，$x\in[1,2]$

则 $f(x),g(x)$ 在 $(1,2)$ 上可导.

由柯西中值定理知：

$$\exists\eta\in(1,2)s,t\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

即 $\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$，所以 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot e^{\eta^2}$

21.（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0(x\geq 0)$. 曲线 $y=f(x)$ 过原点，点 $M$ 为曲线 $y=f(x)$ 上任意一点，过点 $M$ 的切线与 $x$ 轴相交于点 $T$，过点 $M$ 做 $MP$ 垂直于 $x$ 轴于点 $P$，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $MP$ 以及 $x$ 轴所围成图形的面积与三角形 $MTP$ 的面积比恒为 $3:2$，求曲线满足的方程.

【解析】：设 $M(a,f(a))$

所以切线方程：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

当 $y=0, x=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$

且

$$S_{\Delta}MTP=\frac{1}{2}\cdot f(a)\cdot\left[a-\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{f^2(a)}{f'(a)}$$

由题意得：$\dfrac{\int_0^a f(x)dx}{\frac{1}{2}\frac{f^2(a)}{f'(a)}}=\dfrac{3}{2}$

整理得：$\int_0^a f(x)dx=\dfrac{3}{4}\dfrac{f^2(x)}{f'(a)}$

换成熟悉的公式：$\int_0^x f(t)dt=\dfrac{3}{4}\dfrac{f^2(x)}{f'(x)}$ （1）且 $f(0)=0$

对（1）两边同时求导整理后得：

$\dfrac{3}{2}f'(x)\cdot f(x)=[f'(x)]^2$，所以 $f'(0)=0$

令 $f(x)=y, f'(x)=p$，$f''(x)=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

整理，得 $\frac{3}{2}p\frac{dp}{dy}y=p^2$

分离变量得，$\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$

$p^{\frac{3}{2}}=C_1y$

所以 $y'=C_2y^{\frac{2}{3}}$

再分离变量，得$\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y=\int C_2\mathrm{d}x$

所以$3y^{\frac{1}{3}}=C_2x+C_3$

则$y=\left(\frac{C_2x+C_3}{3}\right)^3$

又 $f(0)=0, f'(0)=0$

所以$C_3=0$

则 $y=Cx^3$， $C$ 为任意常数。

22.（本题满分 11 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $x=Py$ 变换为 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$

（I） 求$a$的值；

（II） 求可逆矩阵 $P$.

【解析】：（I）$f(x_1,x_2,x_3)$的二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$

$g(y_1,y_2,y_3)$的二次型矩阵$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

显然$r(B)=2$，经可逆线性变换 $x=Py$，则 $r(A)=r(B)=2$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}=(1+2a)\begin{vmatrix}1&a&a\\1&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=(1+2a)\begin{vmatrix}1&a&a\\0&1-a&0\\0&0&1-a\end{vmatrix}=(1+2a)(1-a)^2=0$$

$a=1$或$a=-\frac{1}{2}$

当$a=1$时, $r(A)=1$，舍去。

故 $a=-\frac{1}{2}$。

（II） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$

$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3 \\ z_2=\frac{\sqrt3}{2}(x_2-x_3) \\ z_3=x_3 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x_1=z_1+\frac{1}{\sqrt3}z_2+z_3 \\ x_2=\frac{2}{\sqrt3}z_2+z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_2 \\ z_2=y_2 \\ z_3=2y_3 \end{cases}$

得 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{\sqrt3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt3} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

所求可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

23.（本题满分 11 分）
设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

(I) 证明矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆；

(II) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵。

【解析】（I）设 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$

① 若 $k_2=0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $k_1=0$；

② 若 $k_2\neq 0$，则 $\boldsymbol{A\alpha}=-\frac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $-\frac{k_1}{k_2}$ 的特征向量，与已知条件产生矛盾。

所以，$k_1=k_2=0$，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关，故矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆。

（II）因为 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$，所以，

$$(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，因此，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，由 $\boldsymbol{P}$ 可逆知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$ 知，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$，
因为特征值互不相同，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$。